

SMOG et les modes de galerie optiques

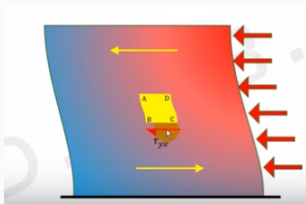
Dominique Leduc, Yann Lecieux, Cyril Lupi, Corentin Guigot

June 21, 2021

GeM, University of Nantes

SMOG

Comment mesurer une déformation au cœur d'un matériau ?



Déformation : champ tensoriel

$$\bar{\bar{\epsilon}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(x_1, x_2, x_3) & \epsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) & \epsilon_{13}(x_1, x_2, x_3) \\ \epsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) & \epsilon_{22}(x_1, x_2, x_3) & \epsilon_{23}(x_1, x_2, x_3) \\ \epsilon_{13}(x_1, x_2, x_3) & \epsilon_{23}(x_1, x_2, x_3) & \epsilon_{33}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

- En chaque point → 6 composantes de déformation
- 6 mesures
- 6 capteurs

Comment mesurer une déformation au cœur d'un matériau ?

Extensomètres enfouis classiques



extensomètre à fibre optique



corde vibrante

Encombrement

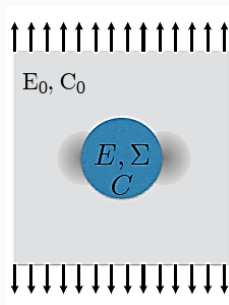


Impossibilité de réaliser 6 mesures au même point

Théorème d'Eshelby → Capteur Sentinelle

Hypothèses

Inclusion ellipsoïdale dans matrice chargée uniformément à l'infini



- Caractéristiques matériaux
 C, C_0 : tenseurs de Hook
 S_0 : tenseur d'Eshelby
- Quantités connues
 E, E^f déformation du capteur
- Quantités recherchées
 E_0, E_0^f déformation de la matrice

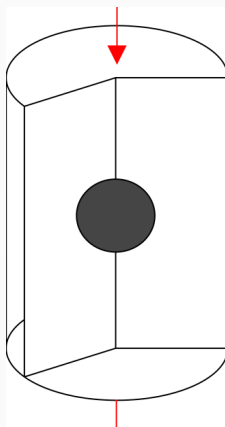
Conclusions

- $(\mathbb{I} + S_0 : C_0^{-1} : (C - C_0)) : E = E_0 + S_0 : C_0^{-1} : (C : E^f - C_0 : E_0^f)$
- Déformation homogène dans l'inclusion

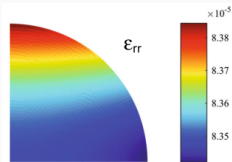
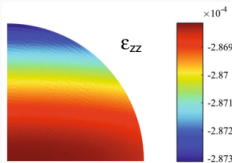
Théorème d'Eshelby → Capteur Sentinelle

En pratique

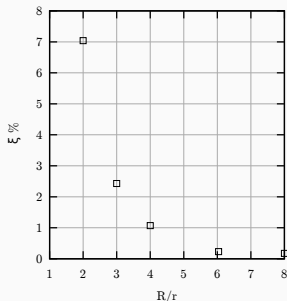
Simulation de compression uniaxiale d'une éprouvette cylindrique



Simulation



Déformation dans l'inclusion

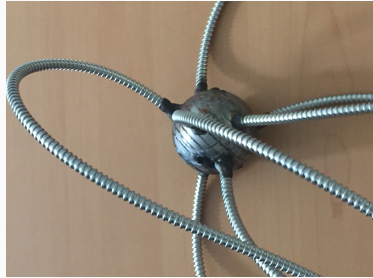
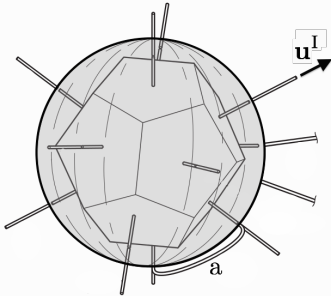


Écart Eshelby – Simulation

Validité Eshelby si inclusion « matrice

Théorème d'Eshelby → Capteur Sentinelle

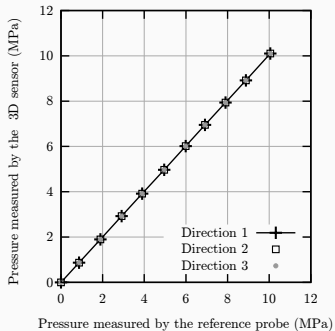
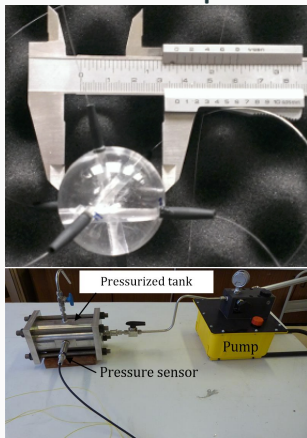
Déformation homogène dans la sphère \Rightarrow positions jauges indifférentes



Capteur Sentinelle : 6 extensomètres à fibre optique selon les 6 normales aux faces d'un dodécaèdre inscrit dans la sphère

Capteur sentinelle première version

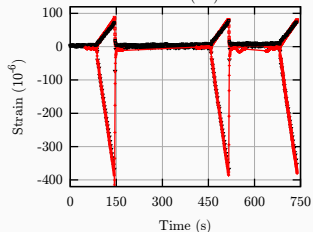
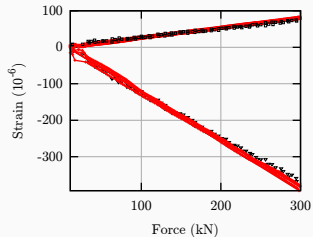
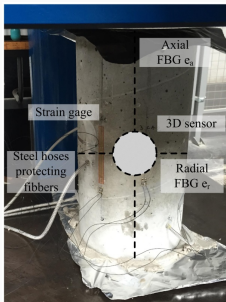
Déformation isotrope



Erreur relative $\simeq 1\%$

Capteur sentinelle deuxième version

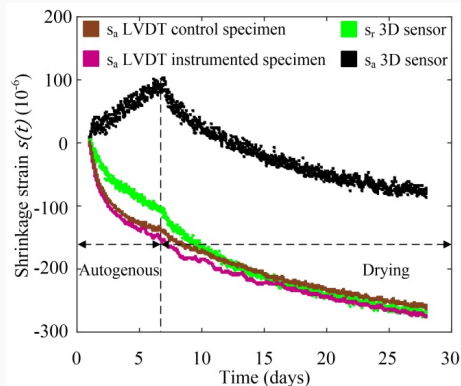
Déformation uniaxiale



Différences entre capteurs: $8 \cdot 10^{-6}$ m/m déformation axiale
 $5 \cdot 10^{-6}$ m/m déformation radiale

Capteur sentinelle deuxième version

Mesure du retrait dans une éprouvette en béton



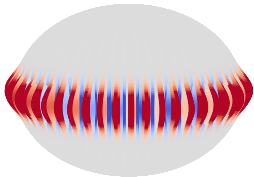
Mise en évidence d'un retrait anisotrope

Capteur sentinelle à modes de galerie

Limites de sentinelle

- collage jauge \rightarrow taille sphère ≥ 40 mm
- difficulté usinage (portée perçage)

Alternative



Mode de Galerie :
Onde se propageant à la surface
d'une sphère



Remplacer les 6 jauges
traversantes par 6 modes de
galeries

Modes de galerie optiques

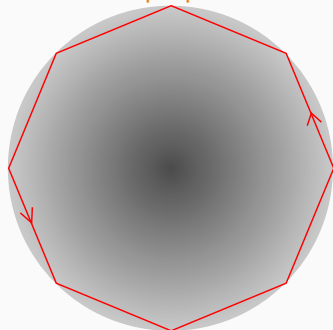
Modes de galerie : "Whispering Gallery Modes"

Acoustique



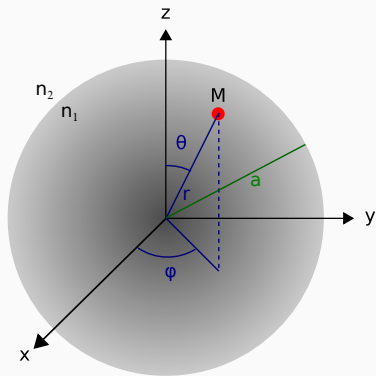
Coupoles de la cathédrale Saint-Paul

Optique



Réflexions totales multiples

Modes de galerie : approche électromagnétique



Équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Équations de propagation des ondes

$$\left\{ \nabla^2 \vec{E}(x, z, t) + k^2 \vec{E}(x, z, t) = \vec{0} \quad \text{où} \quad k = \frac{n\omega}{c} \right.$$

Équation d'onde scalaire

Méthode de résolution de l'équation des ondes

- Recherche de $\mathcal{A}(r, \theta, \phi)$ solution de l'équation scalaire
- $\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \mathcal{A}(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$
 $\vec{B} = -\frac{i}{\omega\mu_0\epsilon} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \mathcal{A}(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$

Équation des ondes scalaire en coordonnées sphériques

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{A} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{A} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \mathcal{A} + k_i^2 \mathcal{A} = 0$$

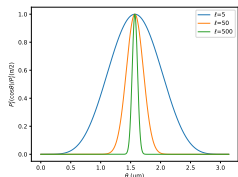
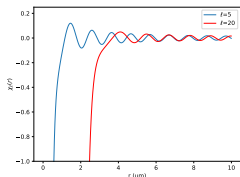
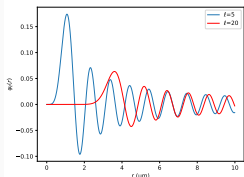
↓

$$\mathcal{A}_{\ell m}(r, \phi, \theta) = \frac{1}{k_i r} [\alpha \psi_{\ell}(k_i r) + \beta \chi_{\ell}(k_i r)] P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{-im\phi}$$

Solution scalaire

$$\mathcal{A}_{\ell m}(r, \phi, \theta) = \frac{1}{k_i r} \left[\alpha \psi_{\ell}(k_i r) + \beta \chi_{\ell}(k_i r) \right] P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{-im\phi}$$

Ricatti-Bessel première espèce
Ricatti-Bessel seconde espèce
Polynôme associé de Legendre

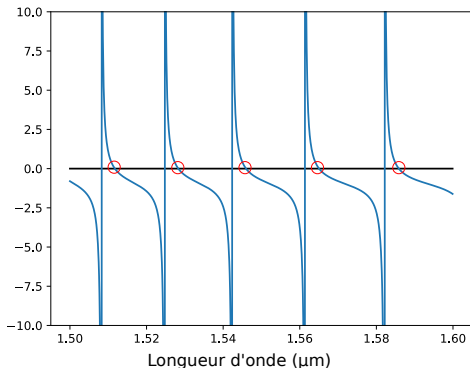


Modes de galerie \rightarrow $\begin{cases} \mathcal{A}_{\ell}(r) = A_1 \frac{\psi_{\ell}(k_i r)}{k_i r} & \text{dans la boule} \\ \mathcal{A}_{\ell}(r) = A_2 \frac{\chi_{\ell}(k_i r)}{k_i r} & \text{hors de la boule} \end{cases}$

Équation de dispersion

Continuité des composantes tangentielles des champs

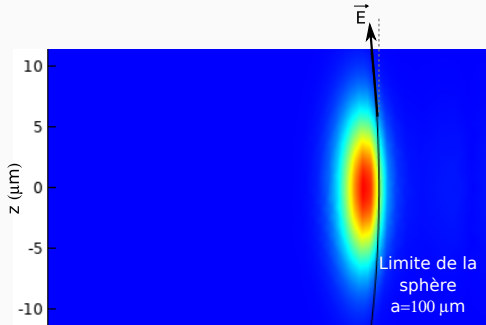
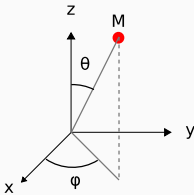
$$\rightarrow \frac{\chi'_e \left(\frac{2\pi}{\lambda} n_2 a \right)}{\chi_e \left(\frac{2\pi}{\lambda} n_2 a \right)} - \frac{n_1 \psi'_e \left(\frac{2\pi}{\lambda} n_1 a \right)}{n_2 \psi_e \left(\frac{2\pi}{\lambda} n_1 a \right)} = 0$$



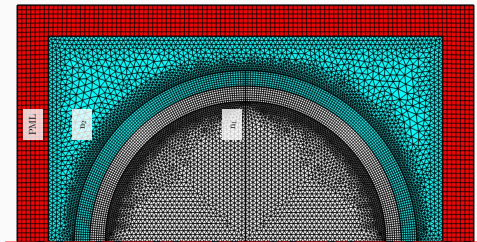
→ Longueurs
d'ondes résonnantes

Champ électrique

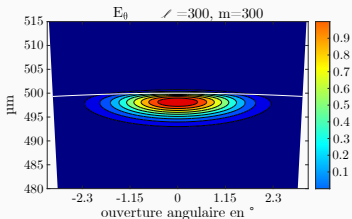
$$\vec{E} \left\{ \begin{array}{l} E_r = 0 \\ E_\theta = \frac{im}{r \sin \theta} \mathcal{A}_\ell(r) P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\ E_\phi = -\frac{1}{r} \mathcal{A}_\ell(r) \frac{\partial P_\ell^m(\cos \theta)}{\partial \theta} e^{im\phi} \end{array} \right. \Rightarrow E_\theta \gg E_\phi$$



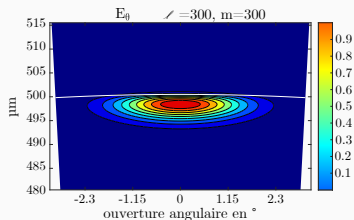
Déformation de la sphère : simulation éléments finis



Simulations Comsol



Sphère non déformée

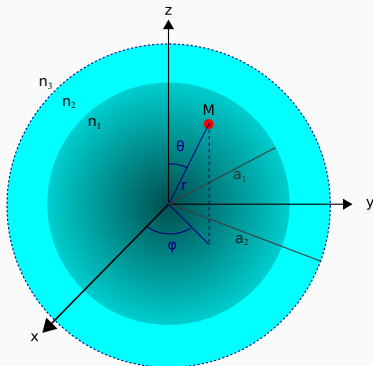


Déformation de 1000×10^{-6}

Problème indice milieu extérieur :

- non maîtrisé
- varie avec déformation

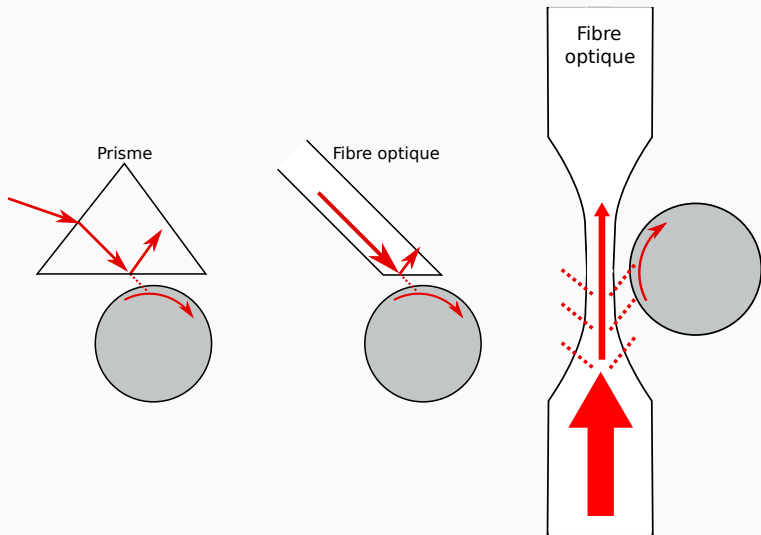
⇒ Ajout d'une gaine tampon



$$3 \text{ milieux} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_\ell(r) = A_1 \frac{\psi_\ell(k_i r)}{k_i r} & \text{dans la boule} \\ \mathcal{A}_\ell(r) = A_2 \frac{\psi_\ell(k_i r)}{k_i r} + A_3 \frac{\chi_\ell(k_i r)}{k_i r} & \text{dans la gaine} \\ \mathcal{A}_\ell(r) = A_4 \frac{\chi_\ell(k_i r)}{k_i r} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

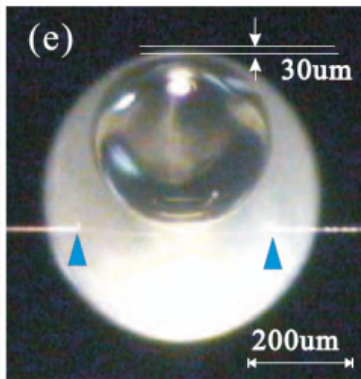
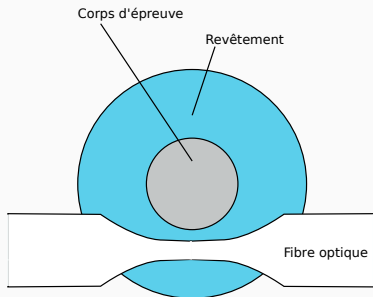
Une gaine de 10λ d'épaisseur isole complètement la sphère du milieu extérieur

Excitation des modes



Couplage par onde évanescente

Excitation des modes avec gaine tampon



Ying-Zhan Yan et al., Optics express , 19(7)
:5753-5759, 2011.

Conclusion : sentinelle à modes de galerie optiques

Architecture

- Corps d'épreuve sphérique en silice de rayon $a \in [100 \mu\text{m}; 500 \mu\text{m}]$ et indice $n_1 \simeq 1,5$
- Gaine tampon en résine d'indice $n_2 \simeq 1,35$
- Injection au moyen de 6 fibres effilées prises dans la gaine

Procédure de mesure

- Mesure des creux dans les spectres des lumières transmises par les fibres effilées \rightarrow longueurs d'ondes des modes de galerie.
- Inversion de la mesure \rightarrow déformation du corps d'épreuve.
- Théorème d'Eshelby \rightarrow déformation de la matrice hôte.