# Les Whispering Gallery Modes pour la mesure de déformation

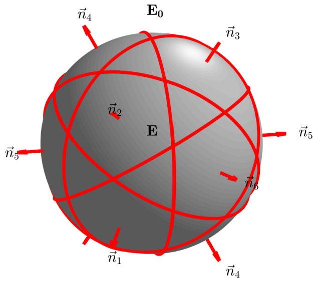
Y.Lecieux[1], D.Leduc[1], C.Guigot[1], M.François[1], C.Lupi[1]

[1] GeM - Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique - UMR 6183 - Université de Nantes - CNRS - École Centrale de Nantes

Webinar Whispering Gallery Modes
Restitution des travaux du pari scientifique régional : Sentinelle à Modes de Galerie (SMOG)
22 juin 2021

# Objectif de l'étude

UNIVERSITÉ DE NANTES




## Relation à établir :

L'objectif est d'obtenir une relation (1) telle que :

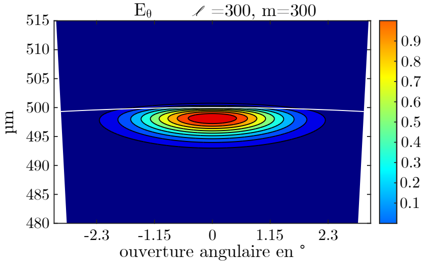
$$E_{kl} = f(\Delta\lambda_i/\lambda_i), \ i \in 1..6, \ k \in 1..3, \ l \in 1..3 \tag{1}$$

et la linéariser pour obtenir une équation matricielle (2) de la forme :

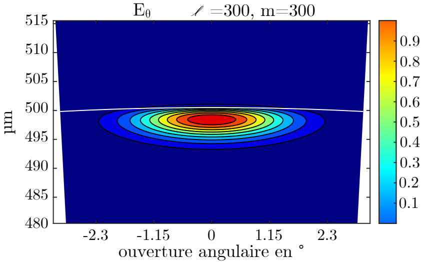
$$\{\mathbf{E}\} = [M]^{-1}\{\Delta\lambda_i/\lambda_i\} \tag{2}$$

# Hypothèse






(a)




(b)

**Existence du mode :**

Un mode continue d'exister quand la sphère se déforme

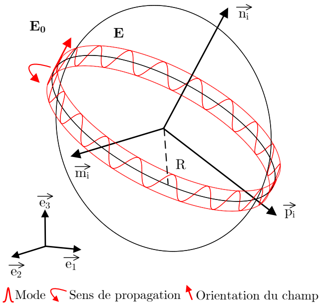
# Méthodologie de l'étude



- Étude de la relation décalage de WGM et déformation pour un mode ;
- Linéarisation avec formulation d'hypothèses simplificatrices ;
- Étude de la validité des approximations ;
- Généralisation des relations à six modes ;
- Étude des performances du capteur.

# Relation décalage de WGM, géométrie et indice



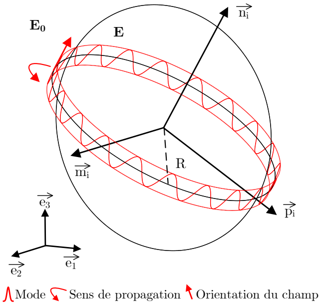



## Décalage de WGM (Ilchenko et al. 1998) :

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} = \frac{\Delta L_i}{L_i} + \frac{\Delta n}{n} - \frac{\ell - m}{2\ell}\Delta(e_i)^2 \tag{3}$$

# Relation $\frac{\Delta L_i}{L_i} = f(E)$



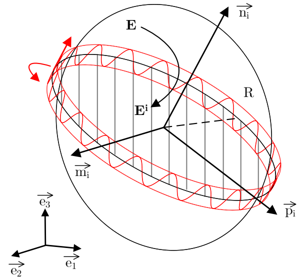



## Étude de la contribution géométrique au décalage de WGM :

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} = \frac{\Delta L_i}{L_i} + \frac{\Delta n}{n} \tag{4}$$

# Projection de E sur le plan de normale $\vec{n}_i$






$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} & & \\ & E_{pq} & \\ & & \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)} \Rightarrow \mathbf{E}^i = \begin{bmatrix} \overline{E}_{11} & \overline{E}_{12} \\ \overline{E}_{12} & \overline{E}_{22} \end{bmatrix}_{(\vec{m}_i,\vec{p}_i)}$$

$$E^i_{ij} = P^{\perp}_{ip} P^{\perp}_{jq} E_{pq} \tag{5}$$

où $P^{\perp}_{kl}$ désigne les composantes du projecteur $\mathbf{P}^{[\vec{n}_i^{\perp}]}$ sur le plan de normale $\vec{n}_i$ :

$$\boldsymbol{P}^{[\vec{n}_i^{\perp}]} = \boldsymbol{I} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i \tag{6}$$

# Exemple : projection sur le plan de normale $\vec{e}_3$



$$\mathbf{P}^{[\vec{e}_3^{\perp}]} = \mathbf{I} - \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}^{[\vec{e}_3^{\perp}]} = \mathbf{P}^{[\vec{e}_3^{\perp}]} \mathbf{E} (\mathbf{P}^{[\vec{e}_3^{\perp}]})^T = \begin{bmatrix} \overline{E}_{11} & \overline{E}_{12} & 0 \\ \overline{E}_{12} & \overline{E}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Déformation d'un cercle décrit par le WGM



Si $(\vec{m}_i, \vec{p}_i)$ coïncident avec les directions principales de $\mathbf{E}^i$ :

$$\mathbf{E}^i = \begin{bmatrix} \overline{E}_{11} & \overline{E}_{12} \\ \overline{E}_{12} & \overline{E}_{22} \end{bmatrix}_{(\vec{m}_i, \vec{p}_i)} \ , \ \mathbf{E}^i = \begin{bmatrix} \overline{E}^i_I & 0 \\ 0 & \overline{E}^i_{II} \end{bmatrix}_{(\vec{m}_i, \vec{p}_i)} \tag{7}$$

$$\vec{u}\left| \begin{array}{l} \overline{E}^i_I x \\ \overline{E}^i_{II} y \end{array} \right._{(\vec{m}_i, \vec{p}_i)} \qquad \vec{X}\left| \begin{array}{l} X = (1+\overline{E}^i_I)x \\ Y = (1+\overline{E}^i_{II})y \end{array} \right._{(\vec{m}_i, \vec{p}_i)} \tag{8}$$

Les points, initialement sur le cercle, obéissent à l'équation 9 :

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{9}$$

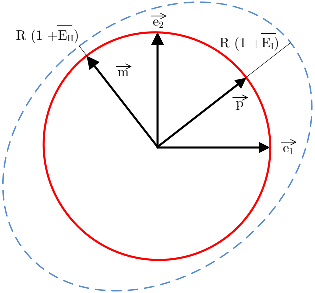
À partir de l'équation 8, il vient :

$$\frac{X^2}{(1+\overline{E}^i_I)^2} + \frac{Y^2}{(1+\overline{E}^i_{II})^2} = R^2 \tag{10}$$

c'est l'équation d'une ellipse d'axes de longueur $a = R(1+\overline{E}^i_I)$ et $b = R(1+\overline{E}^i_{II})$

# Périmètre de l'ellipse






## Formule exacte :

$$\mathcal{P} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 cos^2(t) + b^2 sin^2(t)} dt$$

# Approximation du périmètre de l'ellipse



## Approximation d'Euler :

$$L + \Delta L_i \approx \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

## Linéarisation au premier ordre en déformation :

$$\begin{aligned}
L + \Delta L_i &= \sqrt{2}\pi\sqrt{R^2(1+\overline{E}_I)^2 + R^2(1+\overline{E}_{II})^2} \\
&\simeq 2\pi R\sqrt{1+\overline{E}_I+\overline{E}_{II}} \\
\frac{\Delta L_i}{2\pi R} &\simeq \frac{\overline{E}_I+\overline{E}_{II}}{2} \\
\frac{\Delta L_i}{2\pi R} &\simeq \frac{1}{2}\mathrm{trace}(\mathbf{E}^i)
\end{aligned}$$

La variation de périmètre est donnée par la trace du tenseur projeté dans le plan de normale $\vec{n}_i$.

# Expression en base de tenseur (Bechterew 1926, François MatSyMat 2014)

UNIVERSITÉ DE NANTES

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \\
\mathbf{B}_2 &= \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\
\mathbf{B}_3 &= \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
\mathbf{B}_4 &= (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)/\sqrt{(}2) \\
\mathbf{B}_5 &= (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)/\sqrt{(}2) \\
\mathbf{B}_6 &= (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)/\sqrt{(}2)
\end{aligned}
$$

La base est orthonormée : $\mathbf{B_I B_J} = \delta_{IJ}$

Dans cette base : $E_J = \mathbf{E} : \mathbf{B}_J$

Le tenseur de déformation s'écrit en une matrice colonne $\{\mathbf{E}\}$ avec :

$$
\{\mathbf{E}\} = \left\{ \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{31} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{array} \right\}
$$

# Expression en base de tenseur (Bechterew 1926, François MatSyMat 2014)

UNIVERSITÉ DE NANTES

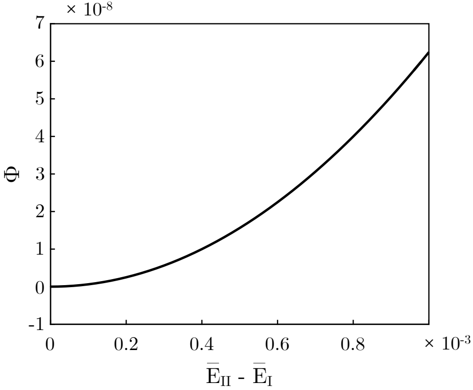
$$\Delta L_i/\pi R \quad = \quad \boldsymbol{P}^{[\vec{n}_i^{\perp}]} : \mathbf{E} \tag{11}$$

Cette équation correspond à un produit scalaire entre les deux tenseurs redimensionnés sous forme de vecteurs-colonne en base de Bechterew :

$$\frac{\Delta L_i}{\pi R} = \langle \; P_{11}^{i\perp} \quad P_{22}^{i\perp} \quad P_{33}^{i\perp} \quad \sqrt{2}P_{23}^{\perp} \quad \sqrt{2}P_{31}^{i\perp} \quad \sqrt{2}P_{12}^{i\perp} \; \rangle \left\{ \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{31} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{array} \right\} \tag{12}$$

# Évaluation de l'approximation

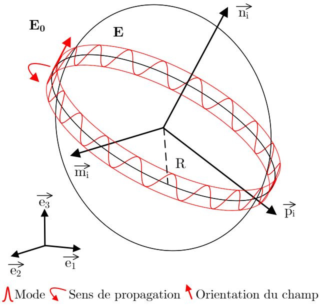





Erreur d'approximation $\Phi = \frac{L^{\mathrm{Approx}} - L^{\mathrm{Num}}}{L^{\mathrm{Num}}}$ sur le calcul du périmètre en fonction de l'ellipticité $\overline{E}_{II} - \overline{E}_{I}$.

# Relation $\frac{\Delta n_i}{n_i} = f(E)$






## Étude de la contribution photoélastique au décalage de WGM :

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} = \frac{\Delta L_i}{L_i} + \frac{\Delta n}{n} \tag{13}$$

# Effet photoélastique



Les effets photoélastiques sont décrits par la relation entre les modifications des composantes du tenseur d'imperméabilité $\mathbf{B}$ et le tenseur de déformation $\mathbf{E}$ telle que :

$$\Delta(B_{ij}) = p_{ijkl}E_{kl} \ , \ (i,j = 1,2,3) \tag{14}$$

où $p_{ijkl}$ sont les composantes du tenseur des indices photoélastique $\mathbb{P}^e$. Les composantes du tenseur d'imperméabilité et celles du tenseur de réfraction $\mathbf{n}$ notées $n_{ij}$ sont liées par la relation suivante :

$$\Delta(B_{ij}) = \Delta\left(\frac{1}{n_{ij}^2}\right) \ , \ (i,j = 1,2,3) \tag{15}$$

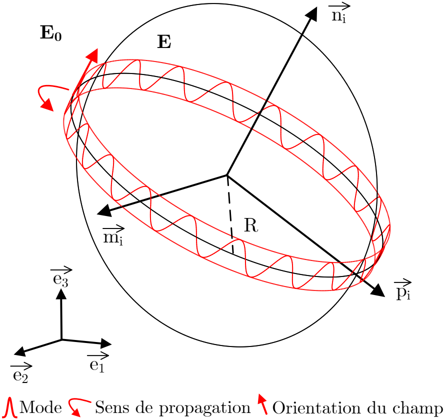
Pour un milieu homogène isotrope, ce tenseur s'exprime simplement :

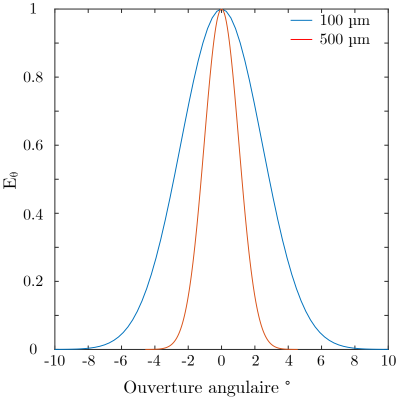
$$\mathbf{n} = n\mathbf{I} \tag{16}$$

où n est l'indice de réfraction du milieu.

# Indice 'vu' par le WGM






## Hypothèse :

Le champ électrique est orienté suivant la direction $\vec{e}_\theta$ assimilée à $\vec{n}_i$

# Relation variation d'indice et déformation



La composante $\Delta B^i$ du tenseur $\Delta\mathbf{B}$ projeté suivant une direction quelconque $\vec{n}_i$, est donnée par :

$$\Delta B^i = \mathbf{P}^{\vec{n}_i} : \Delta\mathbf{B} = \mathbf{P}^{\vec{n}_i} : \mathbb{P}^e : \mathbf{E} \tag{17}$$

où $\mathbf{P}^{\vec{n}_i}$ désigne le projecteur dans la direction $\vec{n}_i$ soit :

$$\mathbf{P}^{\vec{n}_i} = \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i \tag{18}$$

Or d'après 15 :

$$\Delta B^i = -\frac{2\Delta n^i}{(n^i)^3} \tag{19}$$

avec $n^i$, l'indice de réfraction dans la direction $\vec{n}_i$ et $\Delta n^i$ sa variation, ce qui permet d'aboutir à la relation suivante :

$$\frac{\Delta n^i}{n} = -\frac{(n)^2}{2}\mathbf{P}^{\vec{n}_i} : \mathbb{P}^e : \mathbf{E} \tag{20}$$

# Exemple : projection suivant la direction $\vec{e}_3$



$$\mathbf{P}^{\vec{e}_3} = \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta B}^{[\vec{e}_3]} = \mathbf{P}^{\vec{e}_3} : \Delta \mathbf{B} = \mathrm{trace} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta B_{33} \end{bmatrix} = \Delta B_{33}$$

# Expression en base de tenseur (Bechterew 1926, François MatSyMat 2014)

$$\frac{\Delta n^i}{n} = -\frac{(n)^2}{2}\langle P^i_{kl}\rangle[\mathbb{P}^e]\left\{E_{pq}\right\} \tag{21}$$

avec les composantes du projecteur :

$$\langle P^i_{kl}\rangle = \langle \; P^i_{11} \quad P^i_{22} \quad P^i_{33} \quad \sqrt{2}P^i_{23} \quad \sqrt{2}P^i_{31} \quad \sqrt{2}P^i_{12} \; \rangle$$

le tenseur des indices photoélastique $\mathbb{P}^e$ et $\left\{E_{pq}\right\}$ les composantes du tenseurs de déformation **E** écrites sous la forme d'un vecteur colonne :

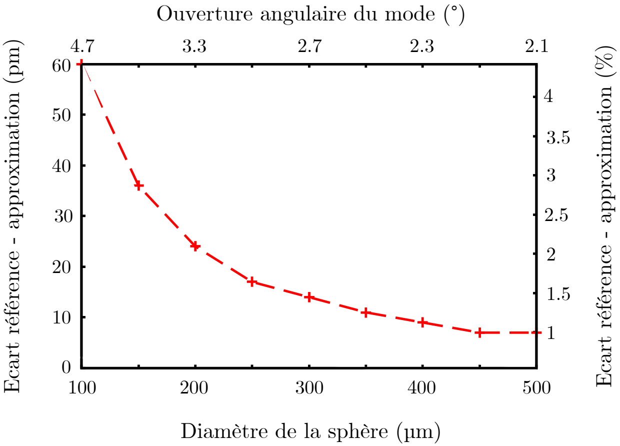
$$[\mathbb{P}^e] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (p_{11}-p_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (p_{11}-p_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (p_{11}-p_{12}) \end{bmatrix}, \left\{E_{pq}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{31} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{array} \right\}$$

# Évaluation de l'approximation



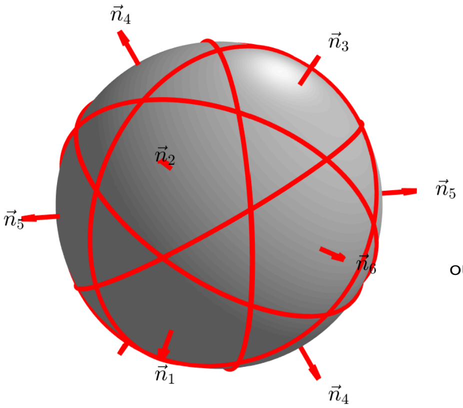
Simulation axisymmétrique avec $E_{11} = E_{22} = 1000.10^{-6}$ dans un plan de normale $\vec{e}_3$ :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = E_{11} - \frac{n^2}{2}(2p_{12}E_{11} + p_{11}E_{33})$$



# Architecture du capteur à 6 anneaux






$$\vec{n}_1 = (0, \varphi, 1)/\sqrt{2+\varphi}$$
$$\vec{n}_2 = (0, \varphi, -1)/\sqrt{2+\varphi}$$
$$\vec{n}_3 = (1, 0, \varphi)/\sqrt{2+\varphi}$$
$$\vec{n}_4 = (1, 0, -\varphi)/\sqrt{2+\varphi}$$
$$\vec{n}_5 = (\varphi, 1, 0)/\sqrt{2+\varphi}$$
$$\vec{n}_6 = (\varphi, -1, 0)/\sqrt{2+\varphi}$$

où $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

# Relation matricielle pour 6 anneaux

$$\left\{\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda}\right\} = \frac{[M_L] - n^2[M_n][\mathbb{P}^e]}{2}\{E_i\} = \frac{[M]}{2}\{E_i\},\ i \in 1..6 \tag{22}$$

$$[M_L] = \frac{1}{2+\varphi}\begin{bmatrix} 2+\varphi & 1 & 1+\varphi & -\sqrt{2}\varphi & 0 & 0 \\ 2+\varphi & 1 & 1+\varphi & \sqrt{2}\varphi & 0 & 0 \\ 1+\varphi & 2+\varphi & 1 & 0 & -\sqrt{2}\varphi & 0 \\ 1+\varphi & 2+\varphi & 1 & 0 & \sqrt{2}\varphi & 0 \\ 1 & 1+\varphi & 2+\varphi & 0 & 0 & -\sqrt{2}\varphi \\ 1 & 1+\varphi & 2+\varphi & 0 & 0 & \sqrt{2}\varphi \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$[M_n] = \frac{1}{(2+\varphi)}\begin{bmatrix} 0 & 1+\varphi & 1 & \sqrt{2}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varphi & 1 & -\sqrt{2}\varphi & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\varphi & 0 & \sqrt{2}\varphi & 0 \\ 1 & 0 & 1+\varphi & 0 & -\sqrt{2}\varphi & 0 \\ 1+\varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\varphi \\ 1+\varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\varphi \end{bmatrix} \tag{24}$$

# Matrice M



$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & -M_4 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 & 0 \\ M_3 & M_1 & M_2 & 0 & -M_4 & 0 \\ M_3 & M_1 & M_2 & 0 & M_4 & 0 \\ M_2 & M_3 & M_1 & 0 & 0 & -M_4 \\ M_2 & M_3 & M_1 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \tag{25}$$

avec :

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 - n^2 p_{12} \\ M_2 &= \frac{1 - n^2[(1+\varphi)p_{11} + p_{12}]}{2+\varphi} \\ M_3 &= \frac{(1+\varphi)(1-n^2 p_{12}) - n^2 p_{11}}{2+\varphi} \\ M_4 &= \frac{\sqrt{2}\varphi}{2+\varphi}\left[1 + n^2(p_{11} - p_{12})\right] \end{aligned} \tag{26}$$

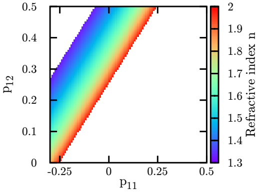
# Inversion du système



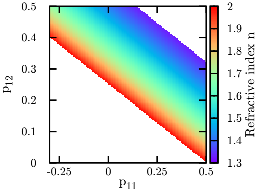
$$\{E_i\} = 2[M]^{-1}\left\{\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda}\right\}, \; i \in 1..6 \tag{27}$$

$$det([M]) = -8M_4^3(M_1^3 + M_2^3 + M_3^3 - 3M_1M_2M_3) = \frac{32\sqrt{2}\varphi^5}{(\varphi+2)^5} P_1(p_{11}, p_{12}, n)^5 P_2(p_{11}, p_{12}, n)$$

$$\begin{aligned} P_1(p_{11}, p_{12}, n) &= n^2(p_{11} - p_{12}) + 1 \\ P_2(p_{11}, p_{12}, n) &= n^2(p_{11} + 2p_{12}) - 2 \end{aligned} \tag{28}$$




(a) $P_1$




(b) $P_2$

# Matrice Inverse



$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 & m_3 & m_3 & m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 & m_1 & m_1 & m_3 & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_2 & m_2 & m_1 & m_1 \\ m_4 & -m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 & -m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & -m_4 \end{bmatrix} \tag{29}$$

avec :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{4M_4^3}{D}(M_2 M_3 - M_1^2) \\ m_2 &= \frac{4M_4^3}{D}(M_1 M_3 - M_2^2) \\ m_3 &= \frac{4M_4^3}{D}(M_1 M_2 - M_3^2) \\ m_4 &= \frac{4M_4^2}{D}(M_1^3 + M_2^3 + M_3^3 - 3M_1 M_2 M_3) \end{aligned} \tag{30}$$

# Sensibilités



$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & -M_4 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 & 0 \\ M_3 & M_1 & M_2 & 0 & -M_4 & 0 \\ M_3 & M_1 & M_2 & 0 & M_4 & 0 \\ M_2 & M_3 & M_1 & 0 & 0 & -M_4 \\ M_2 & M_3 & M_1 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix}$$

- Avec n=1,447, $p_{11} = 0,113$, $p_{12} = 0,252$), on obtient les valeurs suivantes pour les composantes de la matrice $[M]$ : $M_1 = 0,472$, $M_2 = -0,041$, $M_3 = 0,276$ $M_4 = 0,448$.
- Pour une longueur d'onde de l'ordre de 1500 nm, la sensibilité associée au coefficient $M_1$ est de 0,35 pm/$\mu\varepsilon$, celle associée au coefficient $M_2$ de -0,03 pm/$\mu\varepsilon$, celle associée au coefficient $M_3$ de 0,21 pm/$\mu\varepsilon$ et celle associée au coefficient $M_4$ de 0,41 pm/$\mu\varepsilon$.

# Incertitude



$$\{\Delta\lambda\}_{\text{meas}} = \{\Delta\lambda\}_{\text{th}} + \{N_{\text{oise}}\}$$

L'erreur commise sur la déformation est :

$$\{E\}_{\text{err}} = 2[M]^{-1}\{N_{\text{oise}}/\lambda\}$$

À l'aide la loi de composition classique des incertitudes :

$$\sigma(E_i) = \sqrt{\sum_{j=0}^{6} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \lambda_j}\right)^2 \sigma^2(\lambda_j)}$$

et en supposant que $\sigma(\lambda_j) = \sigma(\lambda)\ \forall j$, il vient :

$$\begin{cases} \sigma(E_i) = 2\sqrt{2\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right)}\ \dfrac{\sigma(\lambda)}{\lambda_0} & \text{pour} \quad i = 1,2,3 \\ \sigma(E_i) = 2\sqrt{2}\ m_4\ \dfrac{\sigma(\lambda)}{\lambda_0} & \text{pour} \quad i = 4,5,6 \end{cases}$$

$\sigma(E_i) = 1{,}88\,\sigma(\lambda)$ pour $i = 1,2,3$ et $\sigma(E_i) = 2{,}34\,\sigma(\lambda)$ pour $i = 4,5,6$.

# Conclusion

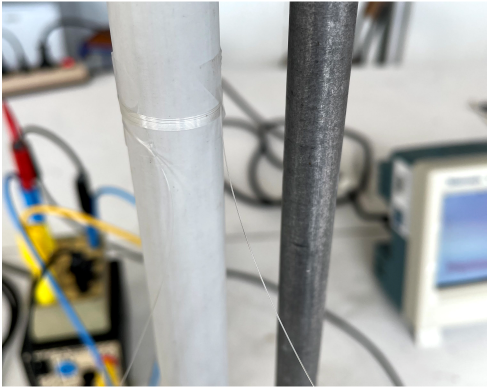


- Une relation linéaire telle que $\{\mathbf{E}\} = [M]^{-1}\{\Delta\lambda_i/\lambda_i\}$ a été établie ;
- Les approximations sont raisonnables dans la plage de déformation $[0, 1000.10^{-6}]$ et pour une sphère de diamètre supérieur à 200 $\mu m$ ;
- Avec un détecteur classique de résolution égale à 1 pm, l'erreur sur les composantes de déformation est, après correction des erreurs systématiques, estimée à 2 $\mu\varepsilon$.

# Perspectives



- La technologie d'excitation des modes optiques est difficile à réaliser ;
- Une première alternative consiste à utiliser un guide d'onde collé sur une circonférence, ce qui revient à conserver la partie géométrique du système calculé précédemment ;
- Une seconde alternative consiste à générer une onde acoustique et à utiliser une fibre optique pour la détecter (travaux préliminaires en cours).



# Merci de votre attention.